L on a un produit scalaire.

$\boxed{\text{EXM 11.26}}$ Pour $V = \mathbb{P}_2$ et

$$(p|q) := \sum_{i=0}^{2} p(i) \cdot q(i)$$

pour $p, q \in \mathbb{P}_2$. Montrer que c'est un produit scalaire.

(PS.1) $$(p|q) \underset{\text{déf}}{:=} \sum_{i=0}^{2} p(i)\, q(i) \underset{\substack{\text{prod. de } \mathbb{R} \\ \text{est comm.}}}{=} \sum_{i=0}^{2} q(i)\, p(i) \underset{\text{déf.}}{=} (q|p)$$

(PS.2) $\boxed{\text{Rq}}$ Il suffit de prouver seulement une égalité dans (PS.2), après avoir prouvé (PS.1)

$$(p_1+\lambda p_2 | q) \underset{\text{déf}}{=} \sum_{i=0}^{2} (p_1+\lambda p_2)(i)\, q(i)$$

$$= \sum_{i=0}^{2} \left(p_1(i) + \lambda p_2(i)\right) . q(i)$$

$$= \sum_{i=0}^{2} p_1(i)\, q(i) + \lambda \sum_{i=0}^{2} p_2(i)\, q(i)$$

$$\underset{\text{déf}}{=} (p_1 | q) + \lambda (p_2 | q).$$

(PS.3) $\quad (p|p) \underset{\text{déf}}{=} \underbrace{\sum_{i=0}^{2} \underbrace{p(i)^2}_{\geqslant 0}} \geqslant 0$

et $\quad$ car

Si $(p|p)=0$ i.e. $\sum_{i=0}^{2} \underbrace{p(i)^2}_{\geq 0} = 0 \Rightarrow \boxed{p(0)=p(1)=p(2)=0}$

Or, un polynôme de degré n $(n \in \mathbb{N})$ a au plus n racines différentes

Alors $\boxed{p = \text{polynôme nul !}}$ car $\deg(p) \leq 2$!!

$\boxed{\text{THM 11.80}}$ Soit $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$

(i) $\mathrm{Lgn}(A)^{\perp} = \mathrm{Ker}(A)$ (ii) $\mathrm{Col}(A)^{\perp} = \mathrm{Ker}(A^T)$

Rq. (ii) est utile car cela nous permet de compléter une base de l'image de A :
si $\mathcal{B} = \{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_p\}$ est base de $\underbrace{\mathrm{Img}(A) = \mathrm{Col}(A)}_{\subseteq \mathbb{R}^m}$
alors $\{\bar{w}_{p+1}, \dots, \bar{w}_m\}$ base de $\mathrm{Ker}(A^T)$
nous donne $\{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_m\}$ base de $\mathbb{R}^m$.

Déf. 11.31 Une famille $\{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$
est
- *orthogonale* si $\bar{w}_i \cdot \bar{w}_j = 0$, $\forall i \neq j$

- orthonormée si elle est orthogonale et $\|\bar{w}_i\| = 1, \forall i$

Prop 11.35 Si $\mathcal{B} = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ est une famille orthogonale et $\bar{v}_i \neq \bar{0}, \forall i$, alors $\mathcal{B}$ est libre. En particulier, toute famille orthonormée est libre.

Rq Si $\mathcal{B} = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ est orthogonale et $\bar{v}_i \neq \bar{0}, \forall i$, alors

$$\bar{\mathcal{B}} = \left\{ \frac{\bar{v}_1}{\|\bar{v}_1\|}, \dots, \frac{\bar{v}_k}{\|\bar{v}_k\|} \right\}$$

est orthonormée

et $\operatorname{Vect} \mathcal{B} = \operatorname{Vect} \overline{\mathcal{B}}$. (normalisation de $\mathcal{B}$)

Déf 11.31 (suite) Une base orthogonale (resp. orthonormée) est une base qui est aussi une famille orthogonale (resp. orthonormée).

But On veut calculer des bases orthogonales!

Pourquoi? → Calcul des coordonnées (on va voir mtn)

→ Calcul de proj. orthogonale

(la prochaine fois)

$\boxed{\text{THM 11.36}}$ Soit $\mathcal{B} = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_p\}$ une base orthogonale d'un SEV W de $\mathbb{R}^n$. Pour $\bar{w} \in W$,

$$[\bar{w}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix} \left(\overset{\text{déf.}}{\Longleftrightarrow} \quad \bar{w} = \alpha_1 \bar{v}_1 + \dots + \alpha_p \bar{v}_p \right)$$

s'obtient de

$$\alpha_i = \frac{\bar{w} \cdot \bar{v}_i}{\|\bar{v}_i\|^2} \qquad \forall i \in \{1, \dots, p\}.$$

! Comment calculer une base orthogonale/orthonormée ?

Méthode de Gram-Schmidt

→ d'orthogonalisation

→ d'orthonormalisation

diviser par la norme !

Input $\mathcal{B} = \{\overline{w}_1, \dots, \overline{w}_k\}$ base d'un SEV $W \subseteq \mathbb{R}^n$

On va produire une base orthogonale de W :

Méthode $\mathcal{B}' = \{\overline{v}_1, \dots, \overline{v}_k\}$

via

$$\overline{v}_1 := \overline{w}_1$$

$$\overline{v}_2 := \overline{w}_2 - \frac{\overline{w}_2 \cdot \overline{v}_1}{\overline{v}_1 \cdot \overline{v}_1} \overline{v}_1$$

$$\overline{v}_3 := \overline{w}_3 - \frac{\overline{w}_3 \cdot \overline{v}_1}{\overline{v}_1 \cdot \overline{v}_1} \overline{v}_1 - \frac{\overline{w}_3 \cdot \overline{v}_2}{\overline{v}_2 \cdot \overline{v}_2} \overline{v}_2$$

gonalisation

Ortho

$\vdots$

$$\bar{v}_k := \bar{w}_k - \frac{\bar{w}_k \cdot \bar{v}_1}{\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_1}\bar{v}_1 - \frac{\bar{w}_k \cdot \bar{v}_2}{\bar{v}_2 \cdot \bar{v}_2}\bar{v}_2 - \dots - \frac{\bar{w}_k \cdot \bar{v}_{k-1}}{\bar{v}_{k-1} \cdot \bar{v}_{k-1}}\bar{v}_{k-1}$$

Orthonormalisation

Méthode | Pour produire une base orthonormée de W :

$$\mathcal{B} = \{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_k\}$$

$$\bar{u}_i = \frac{\bar{v}_i}{\|v_i\|}$$

EXM 11.62 | Calculer une base orthonormée de $W = \text{Vect}\{\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3\}$ avec

$$\bar{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{w}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{v}_2 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}, \bar{v}_3 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1 \\ -1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \right\}$$

base orthogonale

$$\left\{ \bar{u}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{u}_2 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 0 \\ 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}, \bar{u}_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/6 \\ \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/6 \\ \sqrt{3}/6 \end{pmatrix} \right\}$$

base orthonormée

EXM $\mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \right\} = W.$

Calculer une base orthonormée (bon) de W